



---

RICCARDO COLAMATTEO

# Matematica

VOLUME PRIMO: SPAZI NUMERICI E GEOMETRICI,  
TRASFORMAZIONI LINEARI, OCTAVE, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X.

---



Riccardo Colamatteo  
“Matematica - Volume Primo”

Proprietà letteraria riservata  
© Riccardo Colamatteo

© Kion Editrice, Terni  
Prima Edizione aprile 2014

ISBN: 978-88-97355-59-5

Copertina: *progetto grafico dell'autore*

Stampa: Universal Book, Rende (CS)

[www.kioneditrice.it](http://www.kioneditrice.it)  
[info@kioneditrice.it](mailto:info@kioneditrice.it)

---

## INDICE BREVE

---

1	Spazi numerici ordinati	7
1.1	Teoria degli insiemi	7
1.2	Naturali, interi assoluti e calcolo combinatorio	17
1.3	Interi relativi	27
1.4	Razionali	28
1.5	Reali	34
2	Geometria e spazio numerico complesso	39
2.1	Elementi d'Euclide	39
2.2	Strutture algebriche classiche	46
2.3	Geometria analitica elementare	51
2.4	Goniometria e trigonometria	59
2.5	Prodotti scalare, vettoriale e misto	72
2.6	Spazio numerico complesso	75
3	Trasformazioni lineari e teoria dei grafi	81
3.1	Applicazioni lineari dirette	81
3.2	Equazioni lineari e sistemi	90
3.3	Applicazioni lineari inverse	101
3.4	Teoria dei grafi	105
3.5	Riducibilità di una matrice	108
4	Octave	117
4.1	Scalari, vettori, matrici, polinomi	117
4.2	Operatori e funzioni	120
4.3	Grafi	125
5	L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X	129
5.1	Semplici documenti di testo	130
5.2	Composizione matematica	144
5.3	Grafica	150
5.4	Formattazione avanzata	153
	ALFABETO GRECO	155
	BIBLIOGRAFIA	157



---

## INDICE DETTAGLIATO

---

<b>1</b>	<b>Spazi numerici ordinati</b>	<b>7</b>
1.1	Teoria degli insiemi	7
1.1.1	Insiemi	7
1.1.2	Relazioni, applicazioni, operatori	7
1.1.3	Enti numerici e logici	9
1.1.4	Sistemi	9
1.1.5	Quantificatori, connettivi, implicazioni	9
1.1.6	Operatori logici	10
1.1.7	Proprietà di relazioni, applicazioni, operatori	12
1.1.8	Equivalenze ed ordinamenti	16
1.2	Naturali, interi assoluti e calcolo combinatorio	17
1.2.1	Insieme dei naturali secondo Peano	17
1.2.2	Somma e sommazione in $\mathbb{N}^+$	17
1.2.3	Proprietà formali	18
1.2.4	Interi assoluti	18
1.2.5	Asse numerico naturale	19
1.2.6	Differenze in $\mathbb{N}$	19
1.2.7	Prodotto e produttoria in $\mathbb{N}$	19
1.2.8	Quozienti in $\mathbb{N}$	20
1.2.9	Elevamento a potenza in $\mathbb{N}$	20
1.2.10	Radici e logaritmi in $\mathbb{N}$	21
1.2.11	Numeri primi e teorema fondamentale dell'aritmetica	21
1.2.12	Massimo comun divisore e minimo comune multiplo	22
1.2.13	Calcolo combinatorio e binomio di Newton	22
1.3	Interi relativi	27
1.4	Razionali	28
1.4.1	Rappresentazione con la virgola	30
1.4.2	Razionali periodici	30
1.4.3	Calcolo di radici a mano	32
1.5	Reali	34
1.5.1	Equazioni algebriche di secondo grado	35
1.5.2	Grafi di funzione	36
1.5.3	Applicazioni lineari	36

2	Geometria e spazio numerico complesso	39
2.1	Elementi d'Euclide	39
2.1.1	Le 23 definizioni	39
2.1.2	I 5 postulati	40
2.1.3	I 5 assiomi	41
2.1.4	I 48 teoremi	41
2.1.5	Geometria analitica e teorema di Pitagora	43
2.1.6	5° postulato e geometrie non euclidee	45
2.2	Strutture algebriche classiche	46
2.2.1	Spazi metrici	46
2.2.2	Reticoli ed algebre di Boole	46
2.2.3	Gruppidi, semigrupp, monoidi, gruppi	47
2.2.4	Anelloidi, semianelli, anelli, corpi, campi	47
2.2.5	Spazi vettoriali	48
2.2.6	Spazi normati	48
2.2.7	Spazi euclidei	49
2.2.8	Spazi affini	49
2.2.9	Algebre lineari e di Lie	49
2.3	Geometria analitica elementare	51
2.3.1	Luoghi geometrici	51
2.3.2	Norme e metriche numerate	51
2.3.3	Topologia	51
2.3.4	Le rette	52
2.3.5	I piani	54
2.3.6	Le coniche	55
2.3.7	Le quadriche	57
2.4	Goniometria e trigonometria	59
2.4.1	Misura degli angoli	59
2.4.2	Angoli tra rette incidenti	62
2.4.3	Angoli interni ad un triangolo	63
2.4.4	Seno, coseno, tangente e cotangente	64
2.4.5	Periodicit�, simmetrie e traslazioni	67
2.4.6	Funzioni iperboliche	67
2.4.7	Relazioni trigonometriche	68
2.4.8	Coordinate polari, cilindriche e sferiche	70
2.5	Prodotti scalare, vettoriale e misto	72
2.5.1	Prodotto scalare	72
2.5.2	Prodotto vettoriale	72
2.5.3	Prodotto misto	73
2.6	Spazio numerico complesso	75
2.6.1	Forma trigonometrica dei numeri complessi	76
2.6.2	Somma e prodotto in $\mathbb{C}$	76

2.6.3	Quozienti in $\mathbb{C}$ . . . . .	78
2.6.4	Elevamento a potenza, radice e logaritmo di un numero complesso . . . . .	78
2.6.5	Spazi hermitiani . . . . .	79
<b>3</b>	<b>Trasformazioni lineari e teoria dei grafi . . . . .</b>	<b>81</b>
3.1	Applicazioni lineari dirette . . . . .	81
3.1.1	Caratterizzazione delle applicazioni lineari dirette . . . . .	81
3.1.2	Applicazioni lineari dirette in rappresentazione algebrica . . . . .	82
3.1.3	Matrici . . . . .	84
3.1.4	Applicazioni lineari dirette in rappresentazione matriciale . . . . .	86
3.1.5	Somma tra applicazioni lineari . . . . .	87
3.1.6	Prodotto d'una applicazione lineare per uno scalare . . . . .	88
3.1.7	Prodotto di composizione . . . . .	88
3.2	Equazioni lineari e sistemi . . . . .	90
3.2.1	Equazioni algebriche lineari . . . . .	90
3.2.2	Sistemi lineari . . . . .	90
3.2.3	Risoluzione geometrica . . . . .	91
3.2.4	Risoluzione algebrica: i determinanti . . . . .	93
3.2.5	Metodo di sostituzione . . . . .	98
3.2.6	Metodo di Gauss - Jordan . . . . .	99
3.3	Applicazioni lineari inverse . . . . .	101
3.3.1	Rappresentazione algebrica . . . . .	101
3.3.2	Matrici inverse . . . . .	102
3.4	Teoria dei grafi . . . . .	105
3.4.1	Grafi . . . . .	105
3.4.2	Rappresentazione matriciale di un grafo . . . . .	107
3.5	Riducibilità di una matrice . . . . .	108
3.5.1	Autodirezioni, autovettori ed autovalori . . . . .	108
3.5.2	Equazioni algebriche non lineari in forma matriciale . . . . .	112
3.5.3	Localizzazione degli autovalori . . . . .	112
3.5.4	Forma canonica di Jordan . . . . .	114

4	Octave	117
4.1	Scalari, vettori, matrici, polinomi	117
4.1.1	Generalità	117
4.1.2	Variabili: definizione ed assegnazione	117
4.1.3	Vettori e matrici	118
4.1.4	Polinomi	119
4.2	Operatori e funzioni	120
4.2.1	Operatori	120
4.2.2	Funzioni matematiche predefinite	121
4.2.3	Definizione di funzioni	122
4.2.4	Funzioni di controllo	123
4.3	Grafici	125
5	$\LaTeX$	129
5.1	Semplici documenti di testo	130
5.1.1	Struttura minimale di un documento $\LaTeX$	130
5.1.2	Inserimento del testo	133
5.1.3	Rappresentazione del testo	134
5.1.4	Titolo, autore e data	135
5.1.5	Sezionamento di un documento ed indici	136
5.1.6	Liste	137
5.1.7	Tabelle, tavole e riferimenti	137
5.1.8	Annotazioni	138
5.2	Composizione matematica	144
5.2.1	Ambienti matematici	144
5.2.2	Font matematici	148
5.2.3	Ambiente <code>array</code>	149
5.3	Grafica	150
5.3.1	Inserimento di immagini esterne con <code>graphicx</code>	150
5.3.2	Inserimento di grafici esterni con <code>wrappfig</code>	150
5.3.3	Contenuti grafici inusuali: gli scacchi	150
5.4	Formattazione avanzata	153
5.4.1	Ri-definizione dei comandi	153
5.4.2	Modifica dei margini di pagina	153
5.4.3	Numerazione delle pagine	153
5.4.4	Contenuti condizionati	153
	ALFABETO GRECO	155
	BIBLIOGRAFIA	157



---

 SPAZI NUMERICI ORDINATI
 

---

Vedi [1]

## 1.1 Teoria degli insiemi

### 1.1.1 Insiemi

Chiamiamo **insieme, classe, famiglia, gruppo o spazio** ciascuna collezione di enti generici detti **elementi, membri, oggetti o punti**. Distinguiamo tra spazi finiti od infiniti a seconda sia possibile o meno definire finito il numero degli elementi ad essi appartenenti; lo spazio privo di elementi è detto insieme vuoto  $\emptyset$ , e lo spazio di tutti gli elementi insieme universo  $U$ . Un insieme è conosciuto quando risulta possibile definire con certezza se un dato elemento vi appartiene o meno.

Per soli insiemi finiti possiamo semplicemente elencare i termini componenti, e quindi servirci di una rappresentazione per estensione grazie a scritture del genere  $S = \{a, b, c, d\}$ ; tra parentesi graffe indichiamo insiemi non ordinati, dunque tali che  $\{a, b, c, d\} = \{b, a, d, c\}$ , e tra tonde insiemi ordinati, quindi per i quali  $(a, b, c, d) \neq (b, a, d, c)$ ; la rappresentazione di un insieme ordinato nasce considerando l'insieme delle parti componenti l'insieme, e quindi ponendo  $(a, b, c, d) = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\}$ .

Alla rappresentazione per estensione si affianca una rappresentazione grafica, detta di Eulero-Venn, formata da cerchi o generiche poligonali chiuse rappresentanti gli insiemi che contengono al loro interno punti introdotti ad indicare i membri dell'insieme stesso; nelle figg. 1 e 2 sono ad esempio date le rappresentazioni di Eulero-Venn degli spazi non ordinato  $S = \{a, b, c, d\}$  ed ordinato  $S = (a, b, c, d)$ .

### 1.1.2 Relazioni, applicazioni, operatori

Non potendosi di certo formare nella pratica scritte infinitamente lunghe o grafi con infiniti distinguibili punti, ricerchiamo un qualsiasi modo per rappresentare spazi ad infiniti elementi.

Definiamo **corrispondenza, relazione o legge** ciascun modo  $\mathfrak{R}$  per associare tra loro due o più enti generici dati  $x, y, z, \dots$ , e quindi equivalentemente lo spazio delle varie ennuple d'elementi in relazione. Ciascuna relazione fissata tra enti matematici

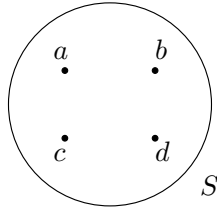


Figura 1: Insieme non ordinato in rappresentazione di Eulero-Venn.

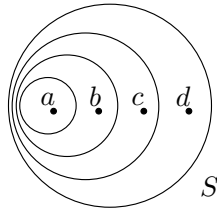


Figura 2: Insieme ordinato in rappresentazione di Eulero-Venn.

dati costituisce una proposizione, o predicato, di quello che è il linguaggio matematico; al fine di rendere questo quale linguaggio della necessità e sufficienza, ci serviremo di soli predicati veri oppure falsi. Scriviamo quindi  $\mathfrak{R}(x, y, z, \dots)$  per indicare che l'ennupla data verifica la relazione; all'opposto scriviamo  $\mathfrak{K}(x, y, z, \dots)$  se gli elementi dati non verificano la relazione proposta. Si noti che le ennuple in relazione risultano ordinate, e quindi le scritture  $\mathfrak{R}(x, y, z, \dots)$  e  $\mathfrak{R}(y, x, z, \dots)$  non sono equivalenti. Grazie alle relazioni possiamo rappresentare compiutamente spazi infiniti; a tale fine introduciamo le relazioni di appartenenza  $\in$  e non appartenenza  $\notin$ , dimodoché una scrittura del genere  $x \in S$  sancisca l'appartenenza dell'elemento  $x$  allo spazio  $S$ , e viceversa  $x \notin S$  ne chiarisca la non appartenenza. Servendoci delle relazioni di appartenenza possiamo inoltre dare un'ulteriore rappresentazione alle altre generiche relazioni: possiamo infatti indicare relazioni  $\mathfrak{R}(x, y, z, \dots)$  con la notazione  $(x, y, z, \dots) \in \mathfrak{R}$ , e relazioni  $\mathfrak{K}(x, y, z, \dots)$  scrivendo  $(x, y, z, \dots) \notin \mathfrak{R}$ ; tali rappresentazioni sono date nell'ottica di poter considerare  $\mathfrak{R}$  come lo spazio delle ennuple in relazione.

La rappresentazione  $\mathfrak{R}(x, y, z, \dots)$  di una generica corrispondenza è detta implicita per distinguerla dalla notazione  $\{y_i\} = \mathfrak{R}'(x, z, \dots)$  detta esplicita nella variabile  $y$ ; lo spazio  $\{y_i\}$  può ammettere più valori ma, fissato l'argomento  $(x, z, \dots)$ , è comunque completamente determinato; le due rappresentazioni sono equivalenti, e dunque